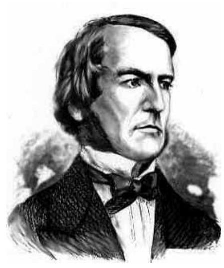
Lycée Les 3 Sources — **Bourg-Lès-Valence**

NSI 1re – Thème 1 — Année **2025-26**

Algèbre de Boole

Repères historiques

Georges Boole (1815–1864) était un mathématicien britannique qui a, entre autre, défini un représentation des opérations logiques à l'aide d'opérations mathématiques.
On appelle cette modélisation **l'algèbre de Boole** et elle est à la base du fonctionnement des ordinateurs et plus généralement de tous les systèmes électroniques.



Tu sais compter jusqu'à 1 ?

L'algèbre de Boole est basée sur un ensemble de 2 valeurs B = {0;1} sur lequel on définit 2 opérations **et** et **ou**. On appelle **booléens** les élèments de B.
Puisqu'il y a peu de cas possibles, on définit ces opérations à l'aide des tableaux de ci-contre, qu'on appelle **table de vérité**.

a	b	a et b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	a ou b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Le 0 et le 1 servent généralement à représenter une proposition fausse ou vraie. Ainsi, le **et** peut être considéré comme étant "les deux propositions sont vraies" et le **ou** comme "au moins une des deux propositions est vraie". On remarque que a ou b est vraie même si les deux sont vraies. On dit que c'est le **ou inclusif**.
Par exemple :

- Pour recopier le cours, il faut un papier **et** un stylo. Il faut les deux. S'il en manque un, ou les deux, on ne peut pas recopier le cours.
- Pour compléter la feuille, vous pouvez utiliser un stylo **ou** un crayon. Si vous avez les deux, ça marche aussi. Mais un seul suffit.

On définit également une transformation **non** qui inverse la valeur de l'élément.

a	non a
0	1
1	0

Il existe de nombreuses notations pour B et les opérations.

	0	1	a et b	a ou b	non a
logique	$\bot$	$\top$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$
informatique	False	True	$a \& b$	$a \| b$	$!a$
algébrique	0	1	$a.b$	$a+b$	$\overline{b}$

Propriétés

Toutes les égalités suivantes sont vraies pour tous booléens a, b et c. Cela veut dire que les tables de vérité des deux membres sont identiques.

- **Complémentarité :**

$$a \text{ ou } (\text{non } a) = 1 \qquad a \text{ et } (\text{non } a) = 0 \qquad \text{non } (\text{non } a) = a$$

Exemples :

- On est sûr que demain "il va pleuvoir **ou** ne pas pleuvoir".
- Et il est impossible d'être à la fois "présent **et** absent".

- **Commutativité :**

$$a \text{ ou } b = b \text{ ou } a \qquad\qquad a \text{ et } b = b \text{ et } a$$

Exemples :

- Avoir besoin “d’un stylo **ou** d’un crayon”, ou “d’un crayon **ou** d’un stylo”, c’est pareil.
- Pour conduire, il faut avoir “18 ans **et** le permis”. Mais on peut aussi dire qu’il faut avoir “le permis **et** 18 ans”.

- **Associativité :**

$$(a \text{ ou } b) \text{ ou } c = a \text{ ou } (b \text{ ou } c) = a \text{ ou } b \text{ ou } c$$
$$(a \text{ et } b) \text{ et } c = a \text{ et } (b \text{ et } c) = a \text{ et } b \text{ et } c$$

Cela veut dire qu’on n’est pas obligé d’évaluer les expressions de gauche à droite.

- **Distributivité :**

$$a \text{ et } (b \text{ ou } c) = (a \text{ et } b) \text{ ou } (a \text{ et } c) \qquad\qquad a \text{ ou } (b \text{ et } c) = (a \text{ ou } b) \text{ et } (a \text{ ou } c)$$

Exemples :

- Pour noter le cours, il faut une feuille **et** “un stylo **ou** un crayon”. On peut aussi dire qu’il faut “une feuille **et** un stylo” **ou** “une feuille **et** un crayon”.
- Pour se connecter sur un système sécurisé on peut utiliser son empreinte digitale **ou** “utiliser un mot de passe **et** un code de validation”. Cela veut dire que si on utilise “son empreinte **ou** le mot de passe” **et** “son empreinte **ou** le code de validation”, ça marche aussi.

Démonstrations

L’avantage de n’avoir que 2 valeurs, c’est qu’il est facile de vérifier qu’une propriété est vraie en testant toutes les valeurs possibles.

EXERCICE 1 : Démontrer les deux égalités de la distributivité à l’aide des tables de vérité suivantes :

a	b	c	b ou c	a et (b ou c)
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

a	b	c	a et b	a et c	(a et b) ou (a et c)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

a	b	c	b et c	a ou (b et c)
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

a	b	c	a ou b	a ou c	(a ou b) et (a ou c)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

EXERCICE 2 : Le mathématicien britannique **Auguste de Morgan** (1806–1871) a également contribué à développer l'algèbre de Boole à l'aide de son théorème :

non (a ou b) = (non a) et (non b)   non (a et b) = (non a) ou (non b)

Démontrer ce théorème à l'aide des tables ci-dessous :

a	b	a ou b	non (a ou b)
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

a	b	non a	non b	(non a) et (non b)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

a	b	a et b	non (a et b)
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

a	b	non a	non b	(non a) ou (non b)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Exemples :

- Ne pas avoir "son stylo **ou** son crayon", c'est n'en avoir aucun des deux. Donc "ne pas avoir son stylo" **et** "ne pas avoir son crayon".
- Ne pas avoir "le permis de conduire **et** 18 ans", c'est ne pas avoir au moins un des deux. Donc "ne pas avoir le permis" **ou** "ne pas avoir 18 ans".

Une nouvelle opération

En français, quand on dit "*fromage ou dessert*", c'est l'un ou l'autre. Ce qui n'est pas le cas du **ou** utilisé dans les booléens.
On appelle **ou exclusif** ou **xor** l'opération définie par la table ci-contre.

a	b	a xor b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EXERCICE 3 : Donner une expression utilisant **ou**, **et** et **non** et équivalente à a xor b.

EXERCICE 4 : Soit en utilisant des propriétés, soit en utilisant les tables de vérité, simplifier les expressions suivantes :

1) a ou (a et b)
2) a et (a ou b)
3) a ou ((non a) et b)
4) (a ou b) et ((non a) ou b)
5) (a xor b) ou (a et b)
6) (a xor b) et (a ou (non b))

Pour aller plus loin

L'algèbre de Boole sert pour définir les bases de la logique. Pour cela, il faut définir l'implication $a \Rightarrow b$ qui signifie que si a est vraie, alors b l'est aussi. La table de vérité est ci-contre.
On peut définir l'implication par l'expression "(non a) ou b".

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exercice 5 : À l'aide de tables de vérité ou en simplifiant les expressions, démontrer que $a \Rightarrow b$ et $(\text{non } b) \Rightarrow (\text{non } a)$ sont équivalents.

Exercice 6 : Les opérateurs **et**, **ou**, **xor** et $\Rightarrow$ ne sont pas les seuls opérateurs à 2 paramètres que l'on peut définir. En fait il y en a 16.

1) Justifier pourquoi il n'y a que 16 opérateurs logiques à 2 paramètres. Vous pourrez regarder les tables de vérité des opérateurs de base.
2) Compléter la table suivante en indiquant tous les opérateurs et en identifiant les opérateurs connus et en essayant d'exprimer les autres à partir des opérateurs connus.

a	b	o_0	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8	o_9	o_{10}	o_{11}	o_{12}	o_{13}	o_{14}	o_{15}
0	0																
0	1																
1	0																
1	1																

Exercice 7 : **David Hilbert** (1862–1943) était un mathématicien allemand qui a essayé de déterminer les axiomes de base permettant de définir et démontrer l'ensemble des propriétés mathématiques. Pour la logique il a donné une liste d'axiomes, qui peuvent s'exprimer ainsi :

- $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
- $((\text{non } b) \Rightarrow (\text{non } a)) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$
- $(a \text{ et } b) \Rightarrow a$
- $a \Rightarrow (a \text{ ou } b)$
- $(a \text{ ou } b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow c))$
- $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$
- $a \Rightarrow (b \Rightarrow (a \text{ et } b))$
- $(a \text{ et } b) \Rightarrow b$
- $b \Rightarrow (a \text{ ou } b)$

Vérifier que ces axiomes sont vrais dans l'algèbre de Boole. C'est-à-dire, vérifier que leurs tables de vérité ne contiennent que des 1.

Exercices en plus

Exercice 8 : Déterminer le nombre de lignes qu'il faut dans une table de vérité avec :

1) 3 variables
2) 4 variables

Réponses

Il y a deux valeurs possibles par variable.

1) $2^3 = 8$
2) $2^4 = 16$

Exercice 9 : Combien de tables de vérité différentes est-ce qu'il est possible d'écrire ?

1) avec 3 variables
2) avec 4 variables

Réponses

Il y a deux valeurs possibles pour chaque lignes. Il faut utiliser le nombre de lignes.

1) 8 lignes donc $2^8 = 256$
2) 16 lignes donc $2^{16} = 65\,536$

Exercice 10 : Déterminer une expression E utilisant 4 variables correspondant à l'extrait de table de vérité ci-contre, les autres lignes ayant 0 comme résultat.

a	b	c	d	E
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Réponse

a est toujours vrai, d toujours faux et il faut au moins b ou c.
Donc a et (b ou c) et d.