# Changement de base

## *Faire le tour des bases*

On appelle **base** $n$ l'ensemble des nombres pouvant être écrits à l'aide d'un alphabet de $n$ chiffres, allant de 0 à $n-1$. Par exemple, les nombres que nous utilisons couramment sont exprimés en base 10, avec les chiffres allant de 0 à 9. On parle de système **décimal**. Le système **binaire**, ou base 2, correspond à des nombres écrits uniquement avec les chiffres 0 et 1. S'il n'y a pas assez de chiffres, comme en base 16, appelée système **hexadécimal**, on utilise des lettres : A qui correspond à 10, B à 11, jusqu'à F pour 15.
Pour déterminer la valeur décimale d'un nombre en base $b$, il faut multiplier chacun des chiffres par une puissance de $b$ dépendant de sa position. Par exemple, en base 10 :

$$243 = 2\times100 + 4\times10 + 3\times1 = 2\times10^2 + 4\times10^1 + 3\times10^0$$

Le chiffre le plus à droite, celui des unités, correspond à $b^0$. On augmente l'exposant de 1 à chaque fois qu'on se déplace à gauche.
Ainsi, pour le nombre 10011 en binaire, que l'on notera $10011_2$, on trouve :

$$10011_2 = 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 16+2+1 = 19$$

De même, $5F_{16}$ correspond à :

$$5F_{16} = 5\times16^1 + 15\times16^0 = 5\times16+15 = 95$$

Dans le cas d'un nombre écrit en base $b$, cela revient à appliquer cet algorithme :

> *resultat* $\leftarrow 0$
> $i \leftarrow 0$
> **Pour** chaque chiffre $c$ en allant de droite à gauche **:**
>     *resultat* $\leftarrow$ *resultat* $+ c\times b^i$
>     $i \leftarrow i+1$
> Renvoyer *resultat*

On dit que cette méthode va de droite à gauche puisqu'on multiplie le nombre des unités par $b^0$ puis celui à sa gauche par $b^1$ et ainsi de suite.

**Exercice 1 :** En utilisant cet algorithme, donner la valeur décimale des nombres suivants :

1) $101001_2$ 2) $110100_2$ 3) $123_4$ 4) $1230_4$
5) $1010_4$ 6) $123_6$ 7) $AB_{16}$ 8) $FF_{16}$

Pour le binaire, on peut utiliser un tableau, comme celui-ci-contre. Il suffit d'inscrire le nombre et d'additionner les nombres en haut des colonnes dans lesquelles il y a un 1.

| $2^6$ 64 | $2^5$ 32 | $2^4$ 16 | $2^3$ 8 | $2^2$ 4 | $2^1$ 2 | $2^0$ 1 | Décimal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 19 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 77 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

**Exercice 2 :** Convertir en décimal les nombres suivants :

1) $0011010_2$ 2) $0110100_2$
3) $1001001_2$ 4) $1111111_2$

Il est également possible d'aller de gauche à droite. C'est la **méthode de Horner**.

> *resultat* ← 0
> **Pour** chaque chiffre $c$ en allant de gauche à droite **:**
>     *resultat* ← $b \times$ *resultat* $+ c$
> Renvoyer *resultat*

Ainsi avec cette méthode, pour $10011_2$, $10010110_2$, $31120_4$ et $\mathrm{B3E}_{16}$ :

$$\begin{aligned} 0\times 2+1 &= 1\\ 1\times 2+0 &= 2\\ 2\times 2+0 &= 4\\ 4\times 2+1 &= 9\\ 9\times 2+1 &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\times 2+1 &= 1\\ 1\times 2+0 &= 2\\ 2\times 2+0 &= 4\\ 4\times 2+1 &= 9\\ 9\times 2+0 &= 18\\ 18\times 2+1 &= 37\\ 37\times 2+1 &= 75\\ 75\times 2+0 &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\times 4+3 &= 3\\ 3\times 4+1 &= 13\\ 13\times 4+1 &= 53\\ 53\times 4+2 &= 214\\ 214\times 4+0 &= 856 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\times 16+11 &= 11\\ 11\times 16+3 &= 179\\ 179\times 16+14 &= 2878 \end{aligned}$$

Cette méthode peut sembler plus longue, mais pour un ordinateur, multiplier par 2 ou ajouter 1 sont des opérations très rapides et cette méthode est bien plus efficace pour la conversion en binaire que la précédente.

**Exercice 3 :** En utilisant cet algorithme donner la valeur décimale des nombres suivants :
1) $10000011_2$ 2) $1032_4$ 3) $22013_4$ 4) $\mathrm{2C4}_{16}$

---

## *Et pour aller dans l'autre sens*

---

Pour déterminer l'écriture en base $b$ d'un nombre entier, il y a aussi 2 méthodes possibles.
On peut faire des divisions successives par $b$. On note les restes et ensuite on les met en partant du dernier au premier.
Voici les conversions de 185 en base 2, 4 et 16.

$$\begin{aligned} 185:2 &= 92 \text{ reste } 1\\ 92:2 &= 46 \text{ reste } 0\\ 46:2 &= 23 \text{ reste } 0\\ 23:2 &= 11 \text{ reste } 1\\ 11:2 &= 5 \text{ reste } 1\\ 5:2 &= 2 \text{ reste } 1\\ 2:2 &= 1 \text{ reste } 0\\ 1:2 &= 0 \text{ reste } 1 \end{aligned}$$

1 0 1 1 1 0 0 1

$$\begin{aligned} 185:4 &= 46 \text{ reste } 1\\ 46:4 &= 11 \text{ reste } 2\\ 11:4 &= 2 \text{ reste } 3\\ 2:4 &= 0 \text{ reste } 2 \end{aligned}$$

2 3 2 1

$$\begin{aligned} 185:16 &= 11 \text{ reste } 9\\ 11:16 &= 0 \text{ reste } 11 \end{aligned}$$

B 9

On a donc $185_{10} = 10111001_2 = 2321_4 = \mathrm{B9}_{16}$.
On remarque que dans le cas binaire, le reste est 1 si le nombre est impair et 0 s'il est pair.

**Exercice 4 :** Convertir le nombre 213 en base 2, en base 4 et en base 16.

Pour l'autre méthode, il faut soit connaître la plus grande puissance de $b$ inférieure ou égale au nombre à convertir, soit vouloir un nombre de chiffres donné, quitte à compléter avec des 0 à gauche.
Cette fois on va diviser par les puissances décroissantes de $b$, en gardant le reste et en notant les quotients, qui correspondent aux nombres du chiffre en base $b$. Les chiffres obtenus sont dans le bon ordre, contrairement à la méthode précédente.

1 0 1 1 1 0 0 1

$185 : 2^7 = 1$ reste 57
$57 : 2^6 = 0$ reste 57
$57 : 2^5 = 1$ reste 25
$25 : 2^4 = 1$ reste 9
$9 : 2^3 = 1$ reste 1
$1 : 2^2 = 0$ reste 1
$1 : 2^1 = 0$ reste 1
$1 : 2^0 = 1$ reste 0

2 3 2 1

$185 : 4^3 = 2$ reste 57
$57 : 4^2 = 3$ reste 9
$9 : 4^1 = 2$ reste 1
$1 : 4^0 = 1$ reste 0

B 9

$185 : 16^1 = 11$ reste 9
$9 : 16^0 = 9$ reste 0

On obtient bien les mêmes résultats. Cette méthode est surtout intéressante pour conversions en binaire avec un nombre de $k$ chiffres, avec $k$ connu à l'avance.

**Pour** $i$ allant de $k-1$ à 0 **:**
  **Si** $n \geq 2^i$ **:**
    $n \leftarrow n - 2^i$
    Rajouter un 1 à droite du résultat
  **Sinon :**
    Rajouter un 0 à droite du résultat

**Exercice 5 :** Convertir les nombres suivants en binaire, avec 8 chiffres à chaque fois :
1) 197 2) 63 3) 78

**Exercice 6 :** Convertir les nombres suivants en hexadécimal, avec 2 chiffres à chaque fois :
1) 230 2) 199 3) 34

Pour le binaire on peut partir de la plus grande puissance de deux inférieure ou égale au nombre et on fait les soustractions successives par les puissances suivantes. On met alors des 1 dans le tableau pour les colonnes correspondant aux puissances utilisées.
L'exemple ci-contre montre que :

$$\begin{array}{r} 71 \\ -\ 64 \\ \hline 7 \\ -\ 4 \\ \hline 3 \\ -\ 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

| Décimal | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 71 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

$$71 = 64 + 4 + 2 + 1 = 1000111_2$$

**Exercice 7 :** Convertir les entiers suivants en binaire :

1) 15 2) 102 3) 57 4) 43

**Exercice 8 :**
1) Quel est le plus grand nombre pouvant être écrit en binaire avec 8 bits ?
2) Quel est le plus grand nombre pouvant être écrit en hexadécimal avec 2 chiffres ?
3) Les couleurs sont souvent représentées selon le système RGB. On utilise 3 entiers entre 0 et 255 pour la quantité de rouge, de vert et de bleu. Expliquer pourquoi on peut également utiliser 3 octets (3 fois 8 bits) ou 3 nombres hexadécimaux de 2 chiffres chacun.

## *Exercices d'entraînement*

**Exercice 9 :** Convertir les nombres suivants en binaire :

1) 147 2) 91 3) 208 4) 157

**Exercice 10 :** Convertir les nombres suivants en binaire. Attention, ils sont trop grands pour rentrer dans le tableau à 8 colonnes.

1) 721 2) 590 3) 1000 4) 677

**Exercice 11 :** Convertir les nombres binaires suivants en base 10.

1) $00101011_2$ 2) $11001110_2$ 3) $10000111_2$ 4) $01011110_2$

**Exercice 12 :** Convertir les nombres binaires suivants en base 10. Attention, ils sont trop grands pour rentrer dans le tableau à 8 colonnes.

1) $1110011001_2$ 2) $1111111001_2$ 3) $1001111111_2$ 4) $1101111000_2$

**Exercice 13 :** Convertir les nombres suivants en base 10.

1) $3021_4$ 2) $20120_4$ 3) $471_6$ 4) $273_{16}$

**Exercice 14 :** Convertir les nombres suivants, donnés en base 10, dans la base indiquée.

1) $444 = \ldots_4$ 2) $666 = \ldots_6$ 3) $473 = \ldots_{16}$ 4) $712 = \ldots_{16}$

**Exercice 15 :** En remarquant un chiffre en hexadécimal est équivalent à 4 bits en binaire, convertir les nombres suivants en base 16 ou en binaire sans calculer leur valeur en base 10.

1) $101111000101_2$ 2) $1011001100_2$ 3) $ABC_{16}$ 4) $7213_{16}$

## *Corrections*

**Exercice 9 :**

1) $10010011_2$ 2) $1011011_2$ 3) $11010000_2$ 4) $10011101_2$

**Exercice 10 :**

1) $1011010001_2$ 2) $1001001110_2$ 3) $1111101000_2$ 4) $1010100101_2$

**Exercice 11 :**

1) 43 2) 206 3) 135 4) 94

**Exercice 12 :**

1) 921 2) 1017 3) 639 4) 888

**Exercice 13 :**

1) 201 2) 536 3) 471 4) 627

**Exercice 14 :**

1) $12330_4$ 2) $3030_6$ 3) $1D9_{16}$ 4) $2C8_{16}$

**Exercice 15 :**

1) $BC5_{16}$ 2) $2CC_{16}$ 3) $101010111100_2$ 4) $111001000010011_2$